Tentamen Numerical Mathematics 2
3 November, 2004

N.B. Tenzij anders aangegeven is de notatie als in het boek van Burden and Faires.

Opgave 1

Beschouw de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

voor x in $[0,1]$, $t \geq 0$ met $u(0,t) = u(1,t) = 0$ en $u(x,0)$ en $u_t(x,0)$ gegeven.

a. Laat zien dat de discretisatie

$$(v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1})/k^2 = (v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j})/h^2,$$

waarin $v_{i,j} \approx u(ih, jk)$ met $h = 1/m$ (m een geheel getal) en k de stap in t-richting, consistent is met de gegeven golfvergelijking. Hoe worden de begin- en randvoorwaarden hierin verwerkt? Geef ook de orde van nauwkeurigheid van deze discretisatie.

b. Toon aan dat voor het schema uit het vorige onderdeel de stap k voor stabiliteit begrensd wordt door $k \leq h$.

c. Laat zien dat $f(x-t)$ (f twee keer differentieerbaar) een oplossing is van de golfvergelijking. Voor welke k en h is het ook een oplossing van de differentievergelijking in onderdeel a?

d. Beschouw voor dit onderdeel $\frac{d}{dt}y = f(t,y)$ met een gegeven beginvoorwaarde. Formuleer de wortelconditie. Iemand vindt dat de wortels van het polynoom $r^3 + r^2 + r + 1$, behorend bij een consistente methode voor beginwaarde problemen, moeten voldoen aan de wortelconditie. Heeft hij het polynoom goed afgeleid? Motiveer uw antwoord.

Opgave 2

a. Stel $Ax = b$ en $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Toon aan dat

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leq ||A||||A^{-1}|| \frac{||\Delta b||}{||b||}.$$

Geef in woorden aan wat deze uitdrukking betekent.

b. Toon aan dat voor symmetrische reële matrices het conditiegetal, in het geval dat het wordt gedefinieerd in de matrix 2-norm, gegeven wordt door

$$\frac{\max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|}{\min_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|}.$$

c. Voor problemen met een groot conditiegetal kan de oplossing worden verbeterd door gebruik te maken van "iterative refinement". Beschrijf dit proces.

d. Definieer bij een matrix A bij elke rij een schijf $C_i = \{z| \quad |z - a_{ii}| \leq r_i\}$ waarin $r_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. Toon aan dat alle eigenwaarden van A in de vereniging van deze schijven liggen.

Z.O.Z.!

Opgave 3

a. Stel dat A een reële symmetrisch positief-definiete matrix is. Toon dan aan dat het minimum van $g(x) = (x, Ax) - 2(x, b)$ de oplossing is van de vergelijking $Ax = b$.

b. Welke differentiaalvergelijking wordt opgelost wanneer we

$$I[u] = \int_0^1 p(x)[u'(x)]^2 - 2f(x)u(x)dx$$

minimaliseren op $C_0^2[0,1]$? Hierin is $p(x)$ een positieve functie.

c. Stel $u = \sum_{i=1}^n c_i\phi_i(x)$ waarin $\phi_i(x) \in C_0^2[0,1]$ en bekend. Toon aan dat wanneer deze uitdrukking ingevuld wordt in $I[u]$ dat dan na minimalisatie een lineair systeem gevonden wordt waarin de matrixcoefficienten worden gegeven door

$$A_{ij} = \int_0^1 p(x)\phi_i'(x)\phi_j'(x)dx$$

en die van het rechterlid door $b_i = \int_0^1 \phi_i(x)f(x)dx$.

d. Stel dat het interval [0,1] wordt opgedeeld in m gelijke stukken h en dat $p(x) \equiv 1$. Hoe ziet dan de matrix uit het vorige onderdeel eruit als $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 1$ als $i = j$ en anders 0) voor de roosterpunten $x_j = jh$ en lineair daartussen?